難題の解法についての認知が一般性を欠く文字式使用の修正に及ぼす効果-高校生の場合-

著者	小野寺　淑行
雑誌名	東北大学大学院教育学研究科研究年報
巻	58
号	1
ページ	91-108
発行年	2009-12
URL	http://hdl.handle.net/10097/45521

類題の解法についての認知が一般性を欠く文字式使用の修正に及ぼす効果―高校生の場合―

小野寺　淑　行

一般性を欠くことなく整数の性質に関する命題を証明するための適切な文字式使用を促進する条件を探る目的のもとに、事前テスト－処遇－事前テストのパラダイムにより、高校生を対象に異なる3種の処遇の効果を比較する実験を実施した。処遇のみが異なる3群の高校生計153名の事前および事後テストの結果の分析から、処遇として具体物の個数の話題の中に埋め込まれた命題「偶数と奇数の和は奇数である」の証明を求める問題を提示し、その解法として「偶数と奇数の和」を異なる2文字を使って2m+（2n+1）と表現することを教示することが、事後テストで課された同種の命題「奇数と奇数の和は偶数である」の証明を促進すること、また、処遇として教示された証明のための文字式で2文字（m、n）が使用されている理由（お互いに関連のない大きさの数だから）を正しく認知することが、事後テストでの「奇数と奇数の和は偶数である」ことの証明において、「奇数と奇数の和」を、2文字を使い一般性を欠くことなく文字式で表現することを有意に促進することが示された。

キーワード：文字式、命題の証明、暗黙の知識、処遇、高校生

問　題

学校の教科としての算数・数学では、その学習内容が一定の系統性、順序性をもって各学年に配当されている。その中にあって、文字式の基礎的理解と活用にかかわる学習内容の配当は中学校1、2学年に集中している。現行（2009年現在）の「中学校学習指導要領」（平成10年12月文部省告示）は、第1学年、第2学年の目標の第1において、文字式の学習についてそれぞれ次のように言及している（引用部分を斜体で示す）。

〔第1学年〕

(1)数を正と負の数まで拡張し、数の概念についての理解を深める。また、文字を用いることの意義及び方程式の意味を理解するとともに、数量などの関係や法則を一般的にかつ簡潔に表現し、処理できるようにする。

〔第2学年〕

教育学研究科　教授

(1)文字を用いた式について、目的に応じて計算したり変形したりする能力を伸ばすとともに、連立二元一次方程式について理解し、それを用いる能力を養う。

中学校1、2学年段階での文字式に関する適切な理解、技能の獲得は、その後の中学、高校、大学での数学学習の重要な基礎となるものである。とりわけ、整数一般にあてはまる命題を証明する（整数の性質を説明する）ために文字式を適切に使用できるようになることは、“*数を正と負の数まで拡張し、数の概念についての理解を深める*”、“*数量などの関係や法則を一般的にかつ簡潔に表現し、処理*できるようにする”（学習指導要領）という目標を達成するうえでも意義のあることである。ここで、整数に関する命題を証明するための文字式使用の方法に関する教科書の記述例をみておく。本研究における実験の被験者となった高校生が中学2年生であった年度を含む時期に使用されていた大日本図書社の中学校用教科書（赤ほか, 1997年；p.24）によれば、「奇数と奇数の和は偶数である」ことは、以下のように証明される（引用部分を斜体で示す）。なお、当時の他の教科書会社の中学2年用数学教科書でも、これとほぼ同様に、文字式による命題の証明（整数の性質の説明）の例を取り上げている。

2つの奇数を、それぞれ$2m+1$、$2n+1$と表す。
ただし、m、nは整数とする。

$$
\begin{aligned}
(2m+1)+(2n+1) &= 2m+1+2n+1 \\
&= 2m+2n+2 \\
&= 2(m+n+1)
\end{aligned}
$$

ここで、$m+n+1$は整数だから、$2(m+n+1)$は偶数である。
したがって、奇数と奇数の和は偶数である。

さらに、同教科書には、これに続けて次のような注意書きがある：

注意　1つの式の中で使われる同じ文字は、同じ数しか表さない。
だから、同じ数とは限らない2つの奇数を表すには、異なる文字m、nを使い、$2m+1$、$2n+1$としなければならない。

なお、上に引用した教科書の注意書きは、命題の証明にかぎらず、一定範囲内の数一般の代わりに文字を使用する際にしたがわなければならない基本的な原則を提示している。その原則について、加藤（1965、p.200）は以下のように簡潔に説明している（引用部分を斜字で示す）：

数の代わりに文字を用いるときは、文字の値の不確定性（可変性）が前提となっているし、文字を用いて式を作る場合には文字の値の同一性（不変性）が前提となっていて、しかも、この2つの側面は独立に現れるのでなく、同時に起こってくる。

つまり、ある文字を数の代わりとして使用する際に、その文字を、定義された変域内のどの値の数の代わりでもありうる（不確定性）ものとして扱えるが、同時に、同一の式内あるいは同一の文脈内にある（たとえば、連立方程式では複数の式が同一文脈の下に置かれている）同じ文字は、それが式（文脈）内のどの位置にあろうとも、相等しい値を表す（同一性）ことになるのである。そして、後

者の「同一性」の原則は、いわばその対偶として、「同一の式内（同一文脈内）の異なる位置にあって値が等しくない数を表すのであれば、同一でない文字（すなわち、異なる文字）によりそれらを表さなければならない」ことを含意しているのである。このように、整数の一般的な性質（命題）を証明するための立式手続は、文字の値の「不確定性」と「同一性」の両原則を同時に前提としているのである。このことから、教科書に記載されている「奇数と奇数の和は偶数である」といった命題の証明のための文字式使用方法（2つの奇数を、それぞれ2m ＋1、2n ＋1と表す）の理解とは、単に立式手続きを記憶しそれを再生できるということにとどまらず、それが文字の値の「不確定」および「同一性」の両者からの制約による必然的なものであるという、原則―手続間の制約関係全体を構造的に理解することであるといえよう。命題の証明の場合にかぎらず、数の代わりとしての文字の使用は、常に文字の値の「不確定」および「同一性」の両原則からの制約のもとに行われることになるのであり、このことを理解し知識として保持することの意義は決して小さくはない。

この意味での本格的な文字式使用法の理解は、中学校での初習の段階においてはともかく、その後に中学、高校での数学学習に多くの時間を費やし、数学の試験を含む大学入試を通過した段階では十分に達成されているであろうと期待されるところである。しかしながら、その期待通りではない現実のあることを示す報告がある。小関ほか（1989）によれば、ある大学の教員養成系学部におけるある授業の受講者に「奇数と奇数の和は偶数である」ことを証明するよう求めたところ、正しく証明できた学生は60%程度であり、残りの大半は、奇数と奇数の和を（2n+1）＋（2n+1）というように表現したという。しかも、この解答でもよい、これのどこが間違っているかわからない、とする学生もみられたということである。上述の命題中の「奇数と奇数」は、相互に独立の2奇数の対一般を指示している。（2n+1）＋（2n+1）という文字式では、文字の値の「同一性」から、同一の奇数どうしの和を表現していることになり、2奇数の対一般の表現としては不十分な（すなわち、一般性を欠く）ものである。本研究では、このような文字の使用法を「同一文字による2数の表現」と呼ぶことにする。小野寺（2005）も、小関の場合と学習歴、学力水準が同等と思われる大学生を対象とした実験で、「奇数と奇数の和は偶数」を証明する際に、同様の一般性を欠く文字式を立式した者が約60％いたことを報告している。また、“奇数と奇数の和は、（2n+1）＋（2n+1）であり”という行を含む5行からなる証明過程の例を示し、この証明の不十分な（または誤っている）箇所を指摘させても、ただしくその行をあげた大学生は49人中20人（41％）にとどまったのである（小野寺，2006a）。

このように大学生が値の異なる可能性のある2数を同一の文字を使い文字式を立式することについて、小野寺（2006b）は、それは不注意による一時的な誤りというよりも、学習者が長期間にわたり省みることもなしに維持している「暗黙の知識」（Fischbein, 1987）によるものであるとしている。この場合の暗黙の知識の内容は、過剰に一般化された「文字の値の不確定性」原則である。すなわち文字式に関連するかれらの知識構造の中で、加藤のいう「文字の値の不確定性」原則（文字はどのような値の数も表わすことができる）が活性化されやすく、逆に「文字の値の同一性」原則（同一式内の異なる位置にあるにあるじ文字は、相互に同じ値の文字を表す）はほとんど活性化されない状態、あるいは「同一式内の複数箇所にある同一文字は、それぞれ異なる値の数を表す」という認識が

成立している状態である。この結果として「文字の値の同一性」原則から導かれる、“*同じ数とは限らない2つの奇数を表すには、異なる文字 m、n を使う*”(先述の中学校用教科書にある注意書き)という原則を参照しない文字式の構成がなされる、との考察がなされた。そのうえで小野寺(2007)は、奇数と奇数の和が偶数であるという命題を証明する標準的な課題を含む4つの課題条件のもとで、値が異なる可能性のある2数を同一文字で表す文字式による、一般性を欠く証明の割合がどのように増減するのかを比較した。この比較の中で、証明されるべき命題を、2種類の異なる具体物の個数の和に関するもの(奇数個のビー玉と奇数個のおはじきの総計は偶数個である)に換えた場合、一般性を欠くことなしに証明を達成する大学生の割合が増加することが示された。

このことをうけて小野寺(2008)は、高校生を対象に、具合物の個数に関する命題の証明に取り組む経験(処遇A)が、標準的な「奇数と奇数の和は偶数」の証明問題の解決に転移するかどうかを、事前テスト－処遇―事後テスト実験により検討した。処遇課題それ自体、たしかに同一文字による2数表現の誤りを抑制するものであった。すなわち、この処遇を受けた38名中29名は、それに先立つ事前テストで与えられた標準的な証明課題(『奇数と奇数の和は偶数である』)で同一文字使用の誤りを示したのであるが、このうち、6名は処遇課題では「奇数と奇数」の対に異なる2文字を当てる妥当な方法を採用したのである。そしてこの6名のうち4名は、その後に直裁に整数の性質に関する証明を問う課題が呈示された場合(事後テスト)においても、同様の妥当な文字式を立式したのである。しかしながら、残りの2名は、事後テストでの標準版の証明問題においては、同一文字による「奇数＋奇数」の文字式表現に戻ってしまい、この課題の効果が一時的なものに止まる可能性も低くないことが同時に示唆された。具体物の個数という文脈での問題解決経験の効果がこのように一時的なものに止まる原因として、その具体物の異なる2種類の名称(具体的には“ビー玉”と“おはじき”)に対応させて別々の文字を使うことが挙げられた。そのようなやり方にしたがえば、自然に2文字を用いて表現することになる。そこでは、かならずしも文字の値の同一性を参照する必要はない。このように文字の値の同一性が参照されることがない場合には、実質的には同じ命題内容でも、より直截に数学的命題の証明を求める問題として提示されると、それに対して再び同一文字による2数の表現に逆戻りする可能性が高まるのだと考えられた。

以上のことから、具体物に関する命題の証明における妥当な文字式使用を標準的な証明問題にも適用できるための条件は、前者における異二文字による対応が必然的であることの認知であろう、と考えられる。同一式内の値の異なる(可能性のある)2数を異なる2文字を用いて表さなければならないことは、「文字の値の同一性」原則から導かれるものであり、中学2年時に学習済みの内容であるが、上述のように、文字式に関する知識構造内での「文字の値の不確定」(文字はどのような値の数も表わすことができる)の過剰な優位性により、それが抑制されているものと考えられる。

そこで、本研究では、「奇数と奇数の和は偶数である」ことを証明する標準的な証明問題をターゲット課題とし、高校生を対象に、「偶数と奇数の和は奇数である」という命題が具体物の個数に関する問題の文脈に埋め込まれている類題を与え、かつ、その解決のためには、2数(偶数と奇数)に異なる2文字を使用し、$2m + (2n+1)$ と立式しなければならないことを教示することの効果、さらに、その

際に異なる2文字を使用する理由を選択させることの効果について検討する。後者の効果に関する仮説は次のとおりである。

類題解決のために、2数に2文字を当てて文字式を立式することについて、その理由を強制的に選択させることにより、文字式に関する知識構造の中から、中学校で学習済みの「文字の値の同一性」の原則が検索、参照されやすくなり、結果として、値が同じとは限らない2数に関する他の命題の証明においても、その2数を異なる2文字により表す文字式を用いて一般を欠くことなく証明を遂行することが促進されるであろう。

方　法

実験計画および被験者

事前テスト―処遇―事後テストのパラダイムの下で、異なる3種の処遇の効果を比較する実験計画である。被験者は、東北地方の県庁所在地ではない地域に位置する公立B高校1年生4クラス162名であった。彼らは、同高校の教員を介しての依頼に応じて被験者となり、第1実験群（E1群；54名）、第2実験群（E2群；54名）、統制群（C群；54名）のいずれかに、クラス横断的にランダムに振り分けられた。各群には、Table 1に示すように、共通の事前・事後テストと、群ごとに異なる処遇用課題A、B、C（後述）が与えられた。なお、これらの被験者のうち、事前テストまたは事後テストにおいて文字式を使用しなかった者9名については、分析の対象から除外した。Table 1には、最終的に分析対象となった各群の被験者数が示されている。

Table 1　各被験者群に与えられた課題

被験者群（人数）	①事前テスト	②処遇	③事後テスト
第1実験群（50名）	「奇数と奇数の和」	「偶数個と奇数個の和」A ―解法提示あり・理由選択あり―	「奇数と奇数の和」
第2実験群（53名）	同上	「偶数個と奇数個の和」B ―解法提示あり・理由選択なし条件―	同上
統制群（50名）	同上	連立二元一次方程式C 統制用課題	同上

材料

ウォーミングアップ問題：事前テスト用の課題用紙に、被験者の所属クラス・学籍番号記入欄、課題に取り組むにあたっての一般的注意とともに、ウォーミングアップ課題を記載したフェースシートを綴じて表紙とした。ウォーミングアップ課題は、6+2、8+8、13+18、4+32、14+14、5+5、10+10、142+12、21+9の中から、「偶数と偶数の和」に該当するものをすべて選択することを求めるものであった。

テスト課題：全被験者に共通の事前テストおよび事後テスト用の課題として、本研究のターゲットである証明課題「奇数と奇数の和」を使用した。これは、整数の性質に関する命題の証明を直截に求

める課題である。課題文の具体的内容はつぎのとおりであった：

「奇数と奇数の和は、かならず偶数である」
このことが成り立つことを、文字式を使って証明しなさい。

処遇用課題：ターゲット課題の場合と同様、異なる2文字を使用して立式することが必要となる中学2年程度の数学の問題である次の3種（A、B、C）のいずれか1種を、処遇用課題として各被験者に割り当てた。この処遇課題のランダムな割り当てにより、各被験者は、E1群（A）、E2群（B）、C群（C）のいずれかに配属されることとなった。

i) 処遇用課題A：「偶数個と奇数個の和」は、2m+（2n+1）のように文字式で表現されうることを示したうえで、このように2文字を使用することの理由の選択を求め（問1）、さらにその和が奇数であることの証明の続行を求める課題（問2）を使用した。課題文はつぎのとおりであった：

以下の“A君”の考えについての文章を読んで、下の問1、2に答えて下さい。

ある店で、赤いボタンと青いボタンを同じ箱に入れたものを、“ボタンセット”という商品名で売っています。箱の容量は大小さまざまであり、入っている赤いボタンの個数、青いボタンの個数も、それぞれまちまちです。ただし、どの箱（セット）にも、赤いボタンが偶数個、青いボタンは奇数個入っています。この場合、箱の中のボタンの総数について次のようにいうことができます：

「どの箱にも、かならず奇数個のボタンが入っている」

上記の「　」内で述べられていることが真であることを、数学的に証明してみよう思ったA君は、まず次のように考えました：

赤いボタンの個数は偶数個だから2mとし、青いボタンの個数は奇数個だから2n＋1としよう（m、nは整数とする）。

すると、赤いボタンと青いボタンの個数の和は、2m＋（2n＋1）となる。これがかならず奇数であることを示せば、証明は完了だ。

問1：以上のように、A君は、偶数個の赤いボタンと奇数個の青いボタンの数を表すために、2m＋（2n＋1）というように、一つの文字式の中でm、nの2文字を使っています。この場合、この文字の使い方は正しいといえます。

では、この場合、なぜ二つの文字を使う必要があるのでしょうか。そのわけとして最も重要だと思うものを、次のア）～エ）の中から一つだけ選び、記号を○で囲んで下さい。

ア）一方は赤、他方は青であり、両者は種類が異なる物の数だから

イ）一方は偶数、他方は奇数であり、両者は性質が異なる数だから

ウ）一方は偶数、他方は奇数であり、両者は大きさが異なる数だから

エ）両者は無関連に決められており、お互いに関連のない大きさの数だから

問 2：上の A 君の考え方にしたがって、証明を続けて下さい（⇒のある行に続けて下さい）

⇒　$2m + (2n + 1) =$

ⅱ）処遇用課題 B：「偶数個と奇数個の和」は、2m+（2n+1）のように文字式で表現されうることを示したうえで、その和が奇数あることの証明の続行を求める課題である。2文字を使用することの理由の選択を求めない点においてのみ、上記の A とは異なる。その詳細は次のとおりである：

以下の“A 君”の考えについての文章を読んで、下の問いに答えて下さい。

ある店で、赤いボタンと青いボタンを同じ箱に入れたものを、“ボタンセット”という商品名で売っています。箱の容量は大小さまざまであり、入っている赤いボタンの個数、青いボタンの個数も、それぞれまちまちです。ただし、どの箱（セット）にも、赤いボタンが偶数個、青いボタンは奇数個入っています。この場合、箱の中のボタンの総数について次のようにいうことができます：

「どの箱にも、かならず奇数個のボタンが入っている」

上記の「　」内で述べられていることが真であることを、数学的に証明してみよう思った A 君は、まず次のように考えました：

赤いボタンの個数は偶数個だから2m とし、青いボタンの個数は奇数個だから2n ＋1としよう（m、n は整数とする）。

すると、赤いボタンと青いボタンの個数の和は、$2m + (2n + 1)$ となる。これがかならず奇数であることを示せば、証明は完了だ。

問い：上の A 君の考え方にしたがって、証明を続けて下さい（⇒のある行に続けて下さい）

⇒　$2m + (2n + 1) =$

ⅲ）処遇用課題 C：統制用の課題として、$x + y = 16$、$80x+50y=950$ という二元一次の連立方程式を立式することにより解決できる切手の枚数に関する問題を使用した。課題文中で2種類の切手の枚数を x、y の2文字で表すべきことが明示されている。具体的内容は次のとおりである：

ある郵便物に80円切手と50円切手が合わせて16枚、950円分貼（は）ってありました。

80円切手、50円切手は、それぞれ何枚ずつ貼(は)ってあったのでしょう。
80円切手の枚数を x、50円切手の枚数を y として、それぞれの切手の枚数を求めなさい。

以上のうち、処遇用課題 A、B は内容的には整数一般の性質に関わる命題の証明問題であり、その解決にあたっては、「文字の値の同一性」原則を踏まえ、「異なる二文字による2数の表現」を採用して立式する必要がある。この意味において、これらの課題はターゲット課題の類題である。ただし、A および B では、証明問題が具体物の個数に関する問題として具体的なカバー・ストーリーに埋め込まれており、さらに「偶数個＋奇数個」の文字式表現、2m+（2n+1）が例示されている。これらのことから、A および B は、実質的には模範解答つきの、具体的な文脈に埋め込まれた証明問題の例題であるといえる。さらに A には、その例示において、異なる2文字が使用されていることの理由を選択する課題（問1）が挿入されている。このことにより、A、B の効果を比較することにより、2文字使用の理由について考えることの効果を見積もることが可能となる。さらに、A を与えられた E1群内で、2文字使用の理由選択と事後テストにおける文字式使用との関連についての分析が可能となる。

処遇課題 C は連立二元一次方程式を立式して解決すべき、切手の枚数に関する問題である。ただし、処遇課題 A、B を解決するための文字式（等式）の中の各文字は、ターゲット課題の場合と同様、その値にかかわらず等号が成り立つ変数としての文字であるのに対して、C を解決するための文字式（方程式）における文字は、特定の値のみが等号を成り立たせる未知数を表すことになる。このため、C は、「文字の値の同一性」原則を踏まえ、「異なる二文字による2数の表現」を採用して立式する必要がある点においてのみターゲット課題と類同的であるが、これ以外の点ではターゲット課題の解決に寄与することを期待できない課題であるといえる。このような課題上の性質から、C は、模範解答を参照にしながらの証明問題の類題 A および B の解決経験がターゲット課題の解決に及ぼす促進効果を査定する際の統制課題として位置づけることができよう。

手続

以上の各材料は、それぞれ A4用紙1枚に解答のための十分なスペースをとって印刷された。事前テストでは、フェースシートへの記入（ウォーミングアップ課題への解答を含む）に引き続き、テスト用課題を〈問題Ⅰ〉として提示して解答を求め、解答終了後ただちに回収した。処遇のセッションでは、同様に、処遇用課題を〈問題Ⅱ〉として提示し、解答後ただちに回収した。さらに事後テストにおいても、再度、テスト用課題を〈問題Ⅲ〉として提示し、解答直後に回収した。実験は、通常の授業1校時内に、事前テスト、処遇、事後テストの順に学校のクラス単位で一斉に行われた。すべての実験が終了した後、被験者全員に、本研究の目的と、ターゲット課題の模範解答及びその根拠（文字の値の同一性）について解説した文書（A4版1枚）を配布した。

結果

ウォーミングアップ課題

事前テストに先立つウォーミングアップ課題では、すべての被験者が「偶数と偶数の和」という表現に当てはまる数式として、6+2、8+8、4+32、14+14、10+10、142+12のすべてを正しく選択した。かりにある被験者が「偶数と偶数の和」という表現を同一の偶数どうしの和のみを指しているものとして理解したならば、その被験者は、8+8、14+14、10+10のみを選択するであろう。しかし、そのような選択パターン示した者は皆無であった。このことから、事前テストおよび事後テストで課されたターゲット課題中の「奇数と奇数の和」についても、これを同一の奇数どうしの和のみを指す表現として理解した被験者はいなかったものと推測することができよう。

テスト課題

1）結果の処理方針

各群の事前テストおよび事後テストにおけるターゲット課題に対する解答の中で、被験者が「奇数と奇数の和」を表現するために使用した文字式を、以下の基準により4種類に分類した。

L1：「異なる二文字による2数の表現」（『異二文字』と略記）：2つの数を表現するのに異なる2文字を用いており、数と数の対一般を表現する文字式となっているもの。

例：(2m+1) ＋ (2n+1)など

L2：「同一文字と異なる数による2数の表現」（『同一文字・異数』と略記）：2数を表現するのに同一の文字と異なる係数や定数を用いているもの。

例：(2n ＋ 1) ＋ (2n+3)、(2n ＋ 1) ＋ (2n-1)、(4n+1) ＋ (2n+1)など

L3：「同一文字と同一数による2数の表現」（『同一文字・同数』と略記）：2数を表現するのに同一の文字と同一の定数を用いているもの。すなわち、2数がまったく同一に表現されているもの。

例：(2n+1) + (2n ＋ 1)

L4：文字を使用しないもの、および無解答のもの

以上のうち、L1は「文字の値の同一性」原則を踏まえ、2奇数を表すのに異なる2文字を用いており「奇数と奇数の和」一般を表現しえているものである。これに対してL2は、「文字の値の同一性」原則に照らしていえば、一定差の奇数どうしの和を表現していることになる。また、L3は同一の奇数どうしの和を表現している。この意味でL2、L3は一対の奇数の和の表現としては一般性を欠くものである。以下では、L2とL3を特に区別する必要がない場合に、両者を含めた名称として「同一文字による2数の表現」（『同一文字』と略記）を用いることとする。結果の分析にあたっては、L4が事前テストまたは事後テストのいずれか一方または両方で見られた場合は被験者単位でデータを除外することとする。これにより、第1実験群の4名、第2実験群の1名、および統制群の3名が分析対象から除外された（Table 1に示す被験者数は、除外後の人数である）。

2) 文字式使用型の群間比較

事前テストおよび事後テストでの文字式使用型別の頻度（人数）を群ごとに示したものが Table 2 である。事前テストでは群間に頻度の偏りはみられない。ちなみに事前テストにおける被験者全体（153人）での L1、L2、L3の割合は、順に、17%：27%：56%であり、同様の基準により分類された国立大学教員養成系大学生（小野寺、2007）の場合（同順に、32.5%、25% 42.5%）、および A 高校生（小野寺2008）の場合（28%、39% 33%）に比較して L1の割合が小さく、L3の割合が大きい。事後テストでは、E1群と E2群では L1が増加する一方、統制群ではほとんど変化がみられない。事後テストでの文字式使用型の分布について群間に有意な偏りがみられた（χ^2_L=9.68、df = 4、p < .05）。残差分析の結果、C 群で L1の頻度が有意に少なく（調整済みの残差：-2.9）、かつ L3のそれが有意に多い（調整済みの残差：+2.2）ことが示された。

Table 2　群別・テスト時期別の各文字使用型使用者数（群内での百分率）

		テスト時期	
被験者群	文字式使用型	事前	事後
E1群 ―処遇用課題 A 使用― （50名）	L1：異二文字	10（20%）	21（42%）
	L2：同一文字・異数	16（32%）	10（20%）
	L3：同一文字・同数	24（48%）	19（38%）
E2群 ―処遇用課題 B 使用― （53名）	L1：異二文字	8（15.1%）	22（41.5%）
	L2：同一文字・異数	14（26.4%）	8（15.1%）
	L3：同一文字・同数	31（58.5%）	23（43.4%）
C 群 ―処遇用課題 C 使用― （50名）	L1：異二文字	8（16%）	9（18%）
	L2：同一文字・異数	12（24%）	11（22%）
	L3：同一文字・同数	30（60%）	30（60%）

また、群ごとに事前テストでの文字使用の型と事後テストでのそれとの対応パターンを示したものが Table 3である。いずれの群においても、事前テスト、事後テストとも同じ文字式使用型を示した被験者が多かった。特に統制群では、事前－事後間で文字式使用型が変化したケースは4名（8%）にすぎなかった。事前から事後へと文字式使用が変化したケースのうち、同一文字使用（L2または L3）から妥当な異二文字使用（L1）への変化（進歩）と、逆に L1から L2または L3への変化（後退）に分類したところ、E1では進歩11に対して後退0であった。E2群におけるこの比は14：0、統制群では1：0であった。2項検定（岩原、1969）により、E1群（P=.0005）、E2群（P=.00006）とも進歩が後退を有意に上回ったことが示された。

Table 3　事前×事後テスト間での文字式使用型の対応 *

		—E1群（n1=50）—		
		（事後テスト）		
		L1	L2	L3
	L1	10	0	0
（事前テスト）	L2	**7**	9	0
	L3	**4**	1	19
		—E2群（n2=53）—		
		（事後テスト）		
		L1	L2	L3
	L1	8	0	0
事前テスト	L2	**8**	6	0
	L3	**6**	2	23
		—C 群（n3=50）—		
		（事後テスト）		
		L1	L2	L3
	L1	8	0	0
事前テスト	L2	**0**	10	2
	L3	**1**	1	28

* 太字は「進歩」に該当するパターンを示す

処遇用課題

統制群に与えられた処遇用課題は、標準的には x+y ＝ 16、；80x+50y=950という連立二元一次方程式を立式しその未知数の値を求めることで解決可能な文章題であった。未知の2数をそれぞれ x、y で表すよう問題文中で指示がなされていた。統制群の被験者50名の被験者全員が正しく立式できた。このうち、単純な計算の誤りにより誤答を導いた者が1名、2個の未知数のうち1個の解のみを求めた段階で終了した者が1名、正しく方程式を立てたが、それを解かなかった者が1名いた。これ以外の47名（94％）は正解を得ていた。統制群を含む3群への被験者の割り当てがランダムになされたことから、統制群にかぎらず本研究の被験者のほぼ全員が、連立二元一次方程式を適切に立式しそれを解決できる程度の数学的知識・技能を備えていたものと推察することが可能であろう。

E1群およびE2群には、偶数と奇数の和は奇数であることを証明する課題を与えた。ただし問題文中で、偶数を2m、奇数は2n+1で表し（m、n は整数）、偶数 + 奇数の和：2m+（2n+1）が常に奇数で表すことを示せば証明完了であることを明示した。被験者には、2m+（2n+1）＝という式から証明を始めることを求めた。事前テストにおいて、2奇数に同一文字を当てる文字式（L2、L3）を使用した者のうち、E1群では50％（40名中20名）、E2群では51％（45名中23名）が、与えられた式を2（m+n）+1に変形して証明を完遂した。

E1群の被験者には、さらに、処遇課題での証明に先立ち、「偶数と奇数の和」を文字を使用して表

現する場合、2m+（2n+1）のように、異なる2文字を使用しなければならない理由として最も重要だと思うものについて4肢選択法で問うた。
各選択肢を選んだ者の人数は以下のとおりであった。

ア）一方は赤、他方は青であり、両者は種類が異なる物の数だから　（13人）

イ）一方は偶数、他方は奇数であり、両者は性質が異なる数だから　（13人）

ウ）一方は偶数、他方は奇数であり、両者は大きさが異なる数だから　（ 7人）

エ）両者は無関連に決められており、お互いに関連のない大きさの数だから　（17人）

以下では、エ）をもっとも妥当な理由として分析を進める。

さて、E1群の被験者のうち、事前テストにおいて、不適切な同一文字使用（L2、L3）を示した者40名について、処遇課題での2文字使用理由選択と事後テストにおける文字使用型とをクロス集計した結果をTable 4に示す。

Table 4　挿入課題での理由選択と事後における文字使用型との連関

理由選択		事後テストでの文字使用型：異二文字	同一文字	計
不適切理由選択	ア	2	9	11
	イ	3	10	13
	ウ	0	5	5
適切理由選択	エ	6	5	11
計		11	29	40

不適切理由（ア、イ、ウ）選択者全体（29名）の中で、異二文字使用（L1）は5名（17%）にとどまり、他の24名（83%）は同一文字使用（L2、L3）のままであった。これに対して適切理由（エ）選択者（11名）では異文二字使用（L1）6名（55%）で過半数を超え、同一文字使用（L2、L3）は5名（45%）であった。この選択理由の適切/不適切の相違による異二文字/同一文字の分布の差異は、フィッシャーの直接確率計算法による検定の結果、有意（P=.042）なものであった。適切な理由エを選択した場合は、そうでない場合に比較しより高い割合で事前テストでの同一文字使用の誤りから脱却して、事後テストで2奇数を異なる2文字を用いて表現していたことになる。

考　察

あらかじめ排除可能な結果の解釈

ウォーミングアップ課題として、10個の数式の中から「偶数と偶数の和」に該当するものをすべて選択することが求められたとき、同一の偶数どうしの8+8、14+14、10+10のみを選択した被験者は皆無であり、全員が、6+2、4+32、142+12をも選択していた。このことから、事前テストおよび事後テストで与えられた証明すべき命題中の「奇数と奇数の和」を、同一奇数どうしの和のみを指すと解釈した被験者がいた可能性は、きわめて低いといえよう。したがって、被験者が「奇数と奇数の和」

を（2n+1）＋（2n+1）と文字式で表現した場合、それを値が同一の奇数どうしを表現しようとしたことによる、とする解釈を排除することができよう。

また、ランダムに統制群に割り当てられた被験者全員が、処遇のセッションで与えられた券面額の異なる2種類の切手の枚数に関する文章題を解くために、指定されたx、yの2文字を使用して正しく連立二元一次方程式を立式でき、さらにその94％は正解を得ることができた。このことから、統制群の被験者を含め、本研究における実験の被験者のほぼ全員が、連立二元一次方程式を適切に立式しそれを解決しうる程度の数学的知識・技能を備えていたものと推察される。したがって、本実験におけるテスト課題でのかれらの失敗を、極端な数学の学力不足に帰属させる類の解釈についても、これを排除してよいであろう。

以上のことを前提として、これ以降の考察を進める。

処遇としての類題の解法提示の効果について

証明すべき命題中の「奇数と奇数の和」を異なる2文字により表現（L1: 異二文字使用）した妥当な文字式使用者の割合（Table 2）の推移をみると、統制群では、事前テスト（16％）から事後テスト（18％）へと横ばいなのに対して、E1群（事前：20％、事後42％）、E2群（事前：15、1%、事後41.5%）の両群では明らかな上昇がみられた。さらに、事前テストから事後テストにかけて、「奇数と奇数の和」の表現がL3（同一文字・同数）からL2（同一文字・異数）またはL1へと変化したものを進歩、逆にL1からL2またはL3へと変化したものを後退とみなし、群ごとにその比率を比較すると（Table 3）、E1群（進歩11、後退0）、E2群（進歩14、後退0）では、それぞれ、進歩が後退を有意に上回った（統制群では進歩1、後退0）。これらの結果より、E1、E2群に対して与えられた処遇は、それぞれ、テスト課題の類題である「偶数と奇数の和は奇数である」ことの証明問題の解決に対して転移効果があったといえる。ただし、この両群間には、事前から事後にかけての遂行向上の度合いに関していかなる有意な差異もみられなかった。

以上のことから、得られた転移効果は、両群に共通に与えられた処遇に帰属させるのが合理的であると思われる。この両群には共通に、偶数個の赤いボタンと奇数個の青いボタンの総個数は奇数個であることの証明が求められた。この課題は､内容的には「偶数と奇数の和は奇数である」という、整数の性質に関する命題の証明であり、この意味で、具体物の個数という表層を帯びた、テスト課題の類題である。さらに、両群とも、奇数個の赤いボタンと偶数個の青いボタンの数を表すために、2m＋（2n＋1）というように、一つの文字式の中でm、nの2文字を使うことは正しい、と文章で教示された。この処遇セッションでは、これに先立つ事前テストで2奇数を同じ文字を使って表した（L2、L3）E1群の40名のうち20名（50％）が、与えられた式を2（m＋n）+1に変形して証明を完遂した。E2群でもほぼ同様の結果であった（該当者43名中23名、53%が証明を完遂）。しかし、事前から事後へのL1の増加がE1群で11人、E2群で14名に止まっており、これらの処遇課題での証明完遂者全員が事後テストでの「奇数と奇数の和は偶数」の証明でL1を使用したわけではない。処遇として2数-2文字使用（L1）を教示され証明を完遂した高校生のうち、E1、E2それぞれの群内で、

その教示された文字式を使用した者(L1)と、それを使用しなかった者(L2、L3)がいたのである。

類題の解法における文字式使用法の理由選択の効果について

事後テストにおけるこの文字式使用の違いを生み出したものは何であろうか。E1群にのみ与えられた、処遇課題⑵での文字を使う理由選択の結果の中にこの問いに答える手がかりを探ってみよう。

E1群の処遇では、偶数個と奇数個の和を表現するのに2文字を使うことの理由を、以下のア～エから選択するよう求められた。

ア)一方は赤、他方は青であり、両者は種類が異なる物の数だから

イ)一方は偶数、他方は奇数であり、両者は性質が異なる数だから

ウ)一方は偶数、他方は奇数であり、両者は大きさが異なる数だから

エ)両者は無関連に決められており、お互いに関連のない大きさの数だから

このうち、アは具体的事物の数量を扱っている命題にのみ限定的にあてはまる理由づけであり、またイ、ウは特定の命題内容にのみ当てはまる理由である。これに対してエは「文字の値の同一性」原則から導かれるものであり、文字の代わりに文字を用いる際に常に参照すべき原則である。本研究の仮説は、E1群の被験者に処遇の一部としてこの理由の選択を迫りア ~ エを比較考量させることが、かれらが自らの知識構造の中に潜んでいる中学で学習済みの「文字の値の同一性」原則を検索し参照することを促進する、と想定したものであった。もし、この仮説が当を得たものであるならば、E1群の事後テストでの2数 -2文字使用の割合は、理由選択を課せられなかったE2群のそれよりも大きいものとなることが予測される。しかし、そのような群間差は生じなかった。その原因としては、理由選択が課せられても、仮説が想定した方向にE1群の被験者の認知が十分に誘導されなかったことが考えられる。実際、事前テストで2数―同一文字の誤り(L2、L3)を示したE1群の被験者40名の中で、選択肢エ)を選択したものは11名(27.5%)にとどまったのである(Table 4参照)。この程度の割合であれば、理由選択が課せられなかったE2群の被験者の中にも、自発的に選択肢エと同様の理由づけをともなって処遇課題での教示を読んだ者がいたかもしれない。

この一方で、エの理由づけが、同一文字使用の誤り(L1、L2)からの脱却の促進要因である可能性はE1群内の結果の比較から推測されるのである。すなわち、事前テストで同一文字使用の誤り(L2、L3)を示したE1群の被験者(40名)で、処遇課題での理由選択において不適切な理由ア、イ、ウを選択した場合(29名)は、事後テストで2数異文字(L1)に転じた者は6名(21%)に留まったのに対して、適切な理由エを選択した場合(11名)は、そのうち6名(55%)が、事前テストでの誤り(L2、L3)から脱却して、事後テストで2奇数を異なる2数を用いた文字式(L1)を立式しえたのである。

ところで、本研究でE1群、E2群に共通に与えられたのと同じ具体物の個数和という文脈に埋め込まれた証明問題を処遇用課題として使用した前研究(小野寺、2008)において、そのような具体的な問題は事後の命題証明での文字式使用にも一定の転移効果を有する一方で、被験者(高校生)の中

には、その処遇問題では妥当な文字式表現を達成しながら、事後テストでは、ふたたび事前テスト時と同様の、同一の文字（n）を使って2奇数を表す（2n+1）+（2n + 1）といった、一般性を欠く文字式表現に戻ってしまう者もいた、と総括がなされていた。このことに照らしていえば、本研究のE1群についての結果は、処遇セッションで具合物の個数和の表層を纏った類題を解くための妥当な文字式使用を教示された後、その文字式使用法を事後テストにおいても示す者と、事前テストでの一般性を欠く文字式に戻ってしまう者を分けている条件は何か、という問いに対する答の一つを提供したことになる。すなわち、その条件とは、具合物の個数和の表層を纏った類題を解くために使用する、2数を異なる文字で表す理由を正しく認知できたか否かがその転移効果を左右する、という答である。

以上を総括して、次の1、2をそれぞれ、本研究の結論および今後の検討課題としておきたい。

1. 事物の個数など具体的数量に言及する命題について証明する課題は、「文字の値の同一性」の原則を参照した適切な文字式使用を促進するための教材として、一定程度の価値を有する。
2. 上記1の効果をより確実なものにするためには、学習者がその具体的数量問題に固有の特殊的手がかりに過度に依存せず、その場合における文字式使用法の根拠について適切に認知できるようにするための配慮をも同時に施す必要があろう。この配慮を具体的にどのように行うか、また、そのことにより、文字式導入期の中学生に対して、より効果的な援助を実現できるか、という問題が今後追究されるべき課題として残されている。

文　献

赤摂也ほか（1997）中学校数学　大日本図書

岩原信九郎（1972）新訂版教育と心理のための推計学（15版）　日本文化科学社

加藤国男（1965）　数学の問題解決における思考（その11）―代数的思考について―　山梨大学学芸学部研究報告、16、119 − 204.

小関熙純・国宗進・中西知真紀・羽住邦男　（1989）　中学生の文字認知について―基礎調査.　群馬大学教育実践研究　6、45-64.

小野寺淑行（2005）　初歩的代数問題での誤りにみる大学生の文字式理解(I)―課題条件による誤りの増減を手がかりとして―　東北大学大学院教育学研究科研究年報、54(1)、255-270.

小野寺淑行（2006a）　初歩的代数問題での誤りにみる大学生の文字式理解(II)―誤りの感知とそれへの対応を手がかりとして―　東北大学大学院教育学研究科研究年報、54(2)、291-299.

小野寺淑行（2006b）　初歩的代数問題での誤りにみる大学生の文字式理解(III)―誤りに気づかないのはなぜか？―　東北大学大学院教育学研究科研究年報、55(1)、233-242.

小野寺淑行（2007）　初歩的代数問題での誤りにみる大学生の文字式理解(IV)―総括的分析からの示唆？―　東北大学大学院教育学研究科研究年報、56(1)、201-214.

小野寺淑行（2008）　高校生における文字式表現の誤りとその修正の試み　東北大学大学院教育学研究科研究年報、57(1)、153-166.

付記

本研究は、平成19-20年度日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究（C）、課題番号19530576、研究代表者　小野寺淑行）の助成を受けたものである。

Effects of Instructed Solution of Similar Problem on High School Students' Sloughing off their Wrong Use of Literal Expression in Mathematical Proof

Toshiyuki ONODERA
（Professor, Graduate School of Education, Tohoku University）

A pretest-treatment-posttest designed experiment was conducted in order to estimate for the effects of instructed solution of similar problem on proving the proposition : *The sum of two odd numbers is an even number*. In the experiment, 153 senior high school students were assigned to any one of three kinds of treatment between pretest and posttest. In the treatment session, one of the three subject groups（group-E1; consisted of 50 students）were instructed the correct literal expression for proving another proposition, and asked to choose the most convincing reason why the expression should be used, out of four alternatives. The subjects who chose the correct alternative had more improved their performance in the posttest, than the subjects who did not so. The author discussed that we could drew some instructional implications from this result.